

# Leçon 916 – Formules du calcul propositionnel : Représentation, formes normales, satisfiabilité. Applications.

4 décembre 2019

## 1 Extraits du Rapport

### Rapport de jury 2017,2018,2019

*Le jury attend des candidats qu'ils abordent les questions de la complexité de la satisfiabilité. Pour autant, les applications ne sauraient se réduire à la réduction de problèmes NP-complets à SAT. Une partie significative du plan doit être consacrée à la représentation des formules et à leurs formes normales.*

## 2 Cœur de la leçon

- Syntaxe et la sémantique des propositions, tables de vérité.
- Formes normales (CNF, DNF, BDD),
- Les méthodes syntaxiques de preuve. (déduction naturelle, calcul des séquents, résolution)
- Validité, satisfiabilité.

## 3 À savoir

- Complétude du calcul propositionnel.
- Les méthodes sémantiques de preuve (DPLL, tableau, table de vérité, BDD).
- Complexité ave SAT, 3SAT, HORNSAT, et 2SAT.
- Système de connecteurs, complétude (le XOR est complet). pour chacune la complexité des problèmes de décision, et du passage d'une forme à l'autre. (pour la validité? pour la satisfiabilité?)

## 4 Ouvertures possibles

- Le théorème de compacité.
- L'étude du fragment propositionnel via Herbrand.
- La résolution au premier ordre.
- Applications des SAT solvers (HAMPATH, Sudoku, coloration de graphes, crack de MD5). Attention les réductions sont à l'envers!
- Génération de circuits.
- Application de HORNSAT aux gestions de dépendances (analyse syntaxique, transformation d'automates et grammaires)

## 5 Conseils au candidat

- Ne pas centrer toute la leçon sur  $NP$ .
- Faire une grosse partie sur les formes normales, leurs avantages et leurs inconvénients (vitesse, conversion).
- Bien comparer les méthodes de résolution, leurs avantages et leurs inconvénients (vitesse, certificat).
- Différents livres peuvent avoir des notations différentes ( $\neg T, \overline{T}$ ), rester cohérent.
- Ne pas oublier les applications.

## 6 Questions classiques

- Pourquoi fait-on tout en CNF alors que la DNF possède de meilleures propriétés ?
- En utilisant un SAT solveur, on doit écrire une traduction, quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le problème pour que ce soit possible ?
- Quel est l'algorithme pour résoudre HORNSAT en temps linéaire ? Quelles applications ?
- Donner un exemple de formule pour laquelle le BDD est de taille exponentielle.
- Comparer la résolution, DPLL et les autres méthodes ?
- Combien de résolutions pour prouver  $\perp$  ?
- Comment utiliser la résolution pour résoudre  $2SAT$  en temps polynomial ?

## 7 Références

- [Go] Proof Theory and Automated Deduction - Jean GOUBAULT-LARRECQ - à la BU/LSV  
*Le must pour la logique*
- [Cori] Logique mathématique Tome 1/2 - René CORI, Daniel LASCAR - pas en BU  
*Typo assez ancienne, pas toujours agréable à lire.*
- [Da] Introduction à la logique - R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI - à la BU/LSV  
*L'autre must pour la logique*
- [Dow] Les démonstrations et les algorithmes - Introduction à la logique et à la calculabilité - Gilles DOWEK - à la BU ?  
*Très bien pour prendre du recul.*

## 8 Dev

- ++ Théorème de COOK-LEVIN - ([Car], p. 191) - 913,915,916,928  
*Preuve que SAT est NP-complet. Aller jusqu'à 3-SAT est ambitieux. Bien comprendre la notion de localité du calcul d'une machine de TURING.*
- ++  $2SAT$  est NL-Complet (ou algo en temps linéaire selon les leçons) - ([Car], [Pap], [Cor] (pour les algo de graphe)) - 915,916,925
- ++ Complétude de la résolution propositionnelle - ([Gou] ?) - 916
- ++ Formule CNF équisatisfiable - ([Per], Prop 3-Z p.77, [Gou]) - 915,916  
*À partir d'une formule, on produit une formule CNF équisatisfiable en temps linéaire. Attention, la mise en CNF est exponentielle (avoir un exemple).*